Corso di Laurea in Fisica, Analisi 1 19-20
Prof. Galise-Garroni-Pinzari-Ponsiglione-Siconolfi
Esercitazione 6

Esercizio 1 Dato $a \in \mathbb{R}$, con $a > 1$, ricordiamo che la funzione esponenziale può essere definita come segue

$$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Utilizzando questa definizione provare le seguenti proprietà:

i) a^x è crescente in x;

ii) per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha $a^{x+y} = a^x a^y$

iii) provare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste una successione crescente di razionali $q_n \le x$ per cui vale

$$\lim_{n\to+\infty} a^{q_n} = a^{x_0}$$

e dedurne che

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Esercizio 2 Sapendo che l'immagine della funzione a^x, per $a > 1$, è costituita da $(0, +\infty)$, mostrare che è invertibile e che la sua inversa $\log_a x$ verifica:

i) $\log_a x$ è crescente in $x > 0$;

ii) per ogni $x, y \in (0, +\infty)$ si ha $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ e $\log_a x^y = y \log_a x$

iii) per ogni $x_0 > 0$

$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0.$$

Esercizio 3 Usando la definizione di e provare che

$$\lim_{x\to 0} \big(1 + x\big)^{\frac{1}{x}} = e$$

e calcolare i seguenti limiti (notevoli)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Esercizio 4 Calcolare, o stabilire se non esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{3x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{(\sin x)^2}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x\sqrt{|x|}}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{\sin(2x)}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \Big(\tan x\Big)^2 \Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big)\,,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos(x)\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1+x^2)}{1+4^x}\,, \qquad \lim_{x\to 0} H(x)\,,$$

dove definiamo

$$H(x) := \begin{cases} 0\,, & x < 0\,, \\ 1\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 5 Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti funzioni, sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$

$$\frac{x^3 + x^2}{2x^3 - x}\,, \qquad \sqrt{x^2 - 3x} - x, \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,, \qquad \ln(2x^2 + 1) - \ln(x^2 + 3)\,, \qquad \frac{3^x - 2^{2x+1}}{2^{2x-2} - 1}.$$

Esercizio 6 Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} x^x, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{3^x+10x^7}, \qquad \lim_{x\to0^+} x\log x\,, \qquad \lim_{x\to0^+} x^x, \qquad \lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x^2})^x\,,$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)-1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x}\sin\frac{1}{x}\,, \qquad \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2)}{1-\cos x}\,, \qquad \lim_{x\to0}\frac{(e^{x^2}-1)\log(1+x)}{x(1-\cos x)}\,.$$

Esercizio 7 Determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità delle funzioni

$$\sqrt{x^3-x^2}, \qquad x\,\mathrm{sgn}(\cos x), \qquad \sin(2\pi\mathrm{sgn}(x)), \qquad \sqrt{1-2\cos x},$$

dove

$$\mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} x/|x| & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

Esercizio 8 In ciascuno dei casi seguenti, dire se è possibile determinare $a\in\mathbb{R}$ in modo che la corrispondente funzione sia continua in $x=0$

$$f(x) := \begin{cases} 2x+x^2+6 & x<0 \\ a(x-2) & x\geq 0 \end{cases}, \quad g(x) := \begin{cases} \cos(e^{-1/x^2}) & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}, \quad h(x) := \begin{cases} \arctan(1/x) & x\neq 0 \\ a & x=0\,. \end{cases}$$

Esercizio 9 Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbb{R}$.

1. $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$ se e solo se $\lim_{x\to(-x_0)^+} f(-x)=+\infty$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l\neq 0$ allora $\lim_{x\to 0} f(1/x)=\frac{1}{l}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. se $\lim_{x\to 0} f(x)=l\neq 0$ allora $\lim_{x\to+\infty} f(1/x)=\frac{1}{l}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. se $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste allora $\lim_{x\to+\infty} f(1/x)$ non esiste $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 10 La funzione parte frazionaria, denotata con $\mathrm{frac}(x)$, è definita per ogni $x\geq 0$ dalla formula

$$\mathrm{frac}(x) = x-[x]$$

dove

$$[x] = \max\{z\in\mathbb{N} \mid z\leq x\}$$

1. la funzione parte frazionaria è limitata $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. la funzione parte frazionaria è monotona $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. se x_n è una successione crescente allora $\mathrm{frac}(x_n)$ ammette limite $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $\lim_{x\to+\infty} [x]+\mathrm{frac}(x)$ esiste $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Nota: Alcuni esercizi richiedo nozioni che verranno introdotte nelle prossime lezioni (per esempio la definizione di funzione continua)